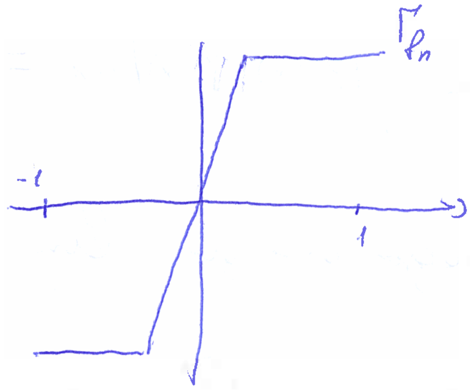
10 6

TD 04

Exo 6. $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ +1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



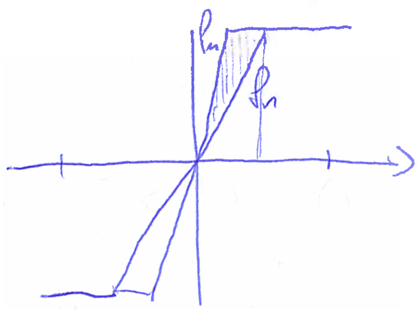
a) ~~Comme sur le~~ Pour montrer que $f_n \in E$, il suffit vérifié que f_n est continue. Comme sur les trois intervalles $[-1, -\frac{1}{n}]$, $[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, 1]$ f_n est continue, il suffit vérifié que les deux valeurs pour $-\frac{1}{n}$, coïncident mais $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, et $n\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$ OK. de même pour $+\frac{1}{n}$.

b) On veut estimer $\|f_n - f_m\|_1$. Supposons $n < m$.

~~Comme~~ On étudie $f_m - f_n$ sur $[0; 1]$.

On obtient : $f_m - f_n \equiv 0$ sur $[\frac{1}{n}; 1]$.

et l'aire de la partie hachurée est.



$\frac{1}{2} \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot - \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2n}$.

Comme f_n est impaire $\forall n$, on obtient $\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{2}{2n} \leq \frac{1}{n} \leq \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$

On montre que (f_n) est de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0$, si $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$, alors

$\forall n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_1 \leq \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

②

c) Soit $\alpha \in]0,1[$. On a : $0 \leq \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx$
$= \|f_n - f\|_1 \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$

De façon analogue, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(x) - f(x)| = 0.$

d) Soit $\alpha \in]0,1[$. Si $N > \frac{1}{\alpha}$, on a $\forall n > N$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \alpha$

et $f(x) = 1 \quad \forall x \in [\alpha; 1]$ $\Rightarrow \int_{\alpha}^{1} |f_n(x) - 1|\, dx = 0$
$\quad = -1 \qquad [-1; \alpha]$
$\int_{-1}^{-\alpha} |f_n(x) - (-1)|\, dx = 0.$

D'où la propriété sur les limites.

e) Supposons par l'absurde que $\exists x_0 \in]0,1]$ t.q. $f(x_0) \neq 1$. Soit $\varepsilon = |f(x_0) - 1|$.
Comme f est continue (car dans E par hypothèse), $\exists \delta > 0$, t.q.
$|f(x) - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Donc $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x) - 1| \geq 2\delta \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \delta\varepsilon.$

D'où, pour $\underset{0}{\overset{\vee}{\alpha}} < x_0 - \delta$, on a $\int_{\alpha}^{1} |f(x) - 1| \geq \delta\varepsilon.$

Mais $\int_{\alpha}^{1} |f(x) - 1|\, dx \leq \int_{\alpha}^{1} \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\downarrow\, 0}\, dx + \int_{\alpha}^{1} \underbrace{|f_n(x) - 1|}_{\downarrow\, 0}\, dx \to 0$

contradiction. De façon analogue si $x_0 \in [-1, 0[$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, f n'est pas continue en 0, donc $f \notin E$.

et la suite de Cauchy (f_n) ne converge pas dans E : E n'est pas complet.

Exo 12 $F : \Lambda \times V \to V$ continue et $\exists k \in]0,1[$ tq.

$\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall x,y \in V,\ \|F(\lambda,x) - F(\lambda,y)\|_V \leq k\|x-y\|_V$.

a) Considérons l'application $f_\lambda : V \to V$

$$f_\lambda(x) = F(\lambda,x).$$

Alors la condition nous dit que f_λ est K-~~contr~~lipschitzienne (donc contractante). Comme V est complet, par le théorème du point fixe de Banach, $\exists! x_\lambda \in V,\ x_\lambda = f_\lambda(x_\lambda) = F(\lambda,x_\lambda)$.

b) $g : \Lambda \to V$, $\lambda \mapsto x_\lambda$. On veut montrer que g est continue.

On veut montrer que $\|\lambda - \lambda_0\| \to 0 \Rightarrow \|x_\lambda - x_{\lambda_0}\|_V \to 0$.

$$\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| = \|f_\lambda(x_\lambda) - f_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})\| \leq \|f_\lambda(x_\lambda) - f_\lambda(x_{\lambda_0})\| + \|f_\lambda(x_{\lambda_0}) - f_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})\|$$

Comme f_λ est k-lipschitzienne, $\|f_\lambda(x_\lambda) - f_\lambda(x_{\lambda_0})\| \leq k\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\|$.

Comme $F(\lambda,x)$ est continue, on a que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \Rightarrow \|F(\lambda,x_{\lambda_0}) - F(\lambda_0,x_{\lambda_0})\| = \|f_\lambda(x_{\lambda_0}) - f_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})\| \leq \varepsilon$$

Donc $\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\|(1-K) \leq \varepsilon \Rightarrow \|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{\underbrace{(1-k)}_{>0}} \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

Donc $\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| \to 0$ si $\lambda \to \lambda_0$ et g est continue.

(4)

c) Soit (Λ, d_Λ) un espace métrique, et (V, d_V) un espace métrique complet. Soit $F : \Lambda \times V \to V$ une fonction continue et telle que $\exists K \in]0,1[\,;\, \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall x,y \in V$, on a

$$d_V(F(\lambda,x), F(\lambda,y)) \leq K \cdot d_V(x,y).$$

Alors $\exists! \, x_\lambda = F(\lambda, x_\lambda)$, et $g : \Lambda \to V$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

Dans les points (a)(b) on a jamais utilisé le fait que Λ, V étaient des espaces vectoriels, donc le résultat est vérifié aussi dans ce cas.